

対偶を利用する証明法

命題「 $p \Rightarrow q$ 」と、その対偶「 $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ 」の真偽は一致する。したがって命題を証明するには、その対偶を証明すればよいとする方法。

9 命題と証明 【対偶】

A. x, y は実数とする。対偶を考えて、次の命題を証明せよ。

(1) $x + y > 7$ ならば「 $x > 3$ または $y > 4$ 」

(2) $y^2 \neq 2y$ ならば $y \neq 2$

(1) 対偶：「 $x \leq 3$ かつ $y \leq 4$ 」ならば $x + y \leq 7$

(2) 対偶： $y = 2$ ならば $y^2 = 2y$

背理法を利用する証明法

命題「 $p \Rightarrow q$ 」を証明するのに、「 p のとき q でない」と仮定して推論し、矛盾を導く。それによって「 $p \Rightarrow q$ 」が真であることを証明する方法。

9 命題と証明 【背理法】

$\sqrt{3}$ が無理数であることを用いて、次の数が無理数であることを背理法で証明せよ。

(1) $1 - \sqrt{3}$

(2) $\sqrt{27}$

(3) $\frac{4}{\sqrt{3}}$

【それぞれを有理数 r に等しいと仮定すると

(1) $\sqrt{3} = r + 1$ (2) $\sqrt{3} = \frac{r}{3}$ (3) $\sqrt{3} = \frac{3}{4}r$ (または $\sqrt{3} = \frac{4}{r}$)

となり、 $\sqrt{3}$ が無理数であることに矛盾】